

金属内応力分布の計算(2)

著者	桜岡 充, 村田 浩
雑誌名	日本歯科大学紀要. 一般教育系
巻	10
ページ	97-104
発行年	1981-03-25
URL	http://doi.org/10.14983/00000200



金属内応力分布の計算 (2)

新潟歯学部 桜 岡 充
村 田 浩

Estimation of the Stress in Metal (2)
Mitsuru SAKURAOKA and Hiroshi MURATA

(1980年12月25日受理)

金属内応力分布の計算 (2)

§ 5 平面問題と複素 Potential

我々は、今後の数節に於て、いわゆる二次元問題を取扱うが、これは数字的に明解であるので、三次元問題への足掛りとするのが目的である。二次元問題は、大きく分けて、次の二つに分れる：²⁾

A) 平面応力状態… $T_{3i}=0$ ($i=1,2,3$),

B) 平面歪状態… $U_{3i}=0$ ($i=1,2,3$).

この二つの状態は互いに関連しており、例えば B) での応力状態が得られた時には、shear modulus 及び Poisson ratio (μ, σ) を ($\mu, \sigma/(1+\sigma)$) に置き換えれば直ちに、A) の場合が得られる。よって、我々は今後、B) の場合について議論を進める。弾性体内の各点を表すのに、複素座標 $z=x_1+ix_2$ を導入する。(2) で与えられる Navier の方程式は、体積力 \mathbf{K} を与える potential を V と表して、 $\sum_{j=1,2} \partial_j(T_{ij}-V\delta_{ij})=0$ と書ける。従って、複素座標 z 及びその共役 z^* を用いると、

$$\partial_z(T_{11}-T_{22}+2iT_{12})+\partial_{z^*}(T_{11}+T_{22}-2V)=0. \quad (13)$$

これが複素表示の Navier 方程式である。

次に、複素変位 u_1+iu_2 の z 及び z^* での微分係数は

$$2\partial_z(u_1+iu_2)=(1-2\sigma)/2\mu \cdot [T_{11}+T_{22}]+i[\partial_1 u_2-\partial_2 u_1], \quad (14a)$$

$$2\partial_{z^*}(u_1+iu_2)=1/2\mu \cdot [T_{11}-T_{22}+2iT_{12}], \quad (14b)$$

で与えられる。さて、Navier 方程式 (13) は、ある複素二変数関数 $F(z, z^*)$ として、

$$\begin{cases} \partial_z F(z, z^*)=T_{11}+T_{22}-2V, & (15a) \\ \partial_{z^*} F(z, z^*)=-(T_{11}-T_{22}+2iT_{12}), & (15b) \end{cases}$$

なる微分係数を持つものを導入することによって常に満足される。この $F(z, z^*)$ に対して (14b) は、 $\partial_{z^*}[4\mu(u_1+iu_2)+F(z, z^*)]=0$ を与えるので、複素変位は次の形に表現できる。

$$4\mu(u_1+iu_2)=8(1-\sigma) \cdot \varphi(z)-F(z, z^*), \quad (16)$$

ここに、 $\varphi(z)$ は z の解析関数である。

(16) 式を z で微分し, (14a) 式を代入することによって,

$$T_{11} + T_{22} - V/(1-\sigma) + i\mu(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = 4\varphi'(z),$$

が得られる。この式の実部は,

$$T_{11} + T_{22} - V/(1-\sigma) = 2[\varphi'(z) + \varphi'^*(z^*)] \quad (17)$$

を与える。さらに, 複素二変数関数 $W(z, z^*)$ を,

$$\partial_z W(z, z^*) = V \quad (18)$$

で定義すると, (15a) は容易に次の形に変形される。

$$F(z, z^*) = 2[\varphi(z) + z\varphi'^*(z^*)] - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} W + 2\psi^*(z^*), \quad (19)$$

ここに $\psi(z)$ は z の解析関数である。以上の諸式をまとめると, 以下の結果が得られる

: 10) 11)

$$\begin{cases} 2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) - z\varphi'^*(z^*) - \psi^*(z^*) + \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma} W, \\ T_{11} + T_{22} = 2[\varphi'(z) + \varphi'^*(z^*)] - \partial_z W/(1-\sigma), \\ T_{11} - T_{22} + 2iT_{12} = -2[z\varphi''^*(z^*) + \psi'^*(z^*)] + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \cdot \partial_z W, \end{cases} \quad (20)$$

ここに, $\kappa = (3-4\sigma)$ であり, φ 及び ψ は解析関数である。こうして, 二次元の静弾性の場合には, (20) 式の形を採用すれば, 基礎方程式である Navier 方程式は自動的に満足されることになるので, 境界条件に適合する様に $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 及び $W(z, z^*)$ を決めさえすればよいのである。ところで, 我々の歯科補綴冠への応用の場合, 体積力の効果は考慮する必要がないので, $W=0$ である。従って, 解くべき問題は, 一変数の解析関数 φ 及び ψ を決定するだけの問題に帰着し, 輝しい成果を修めている解析関数論の枠内に入ることになるのである。こうして, 単純な場合の解を求めておき, これを, 求めたい形状の場合に変換する方法によって多くの境界値問題が解けることになる。

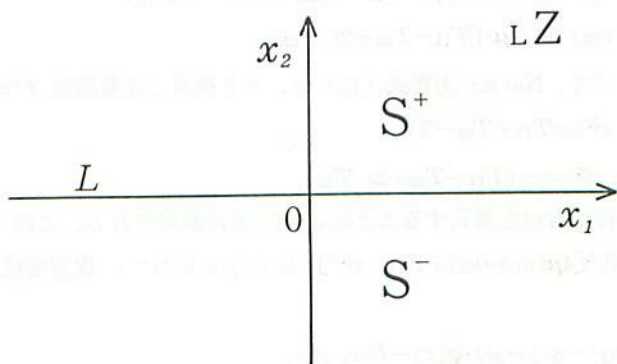


図 4 半無限平面 $S^-(x_2 < 0)$ が弾性体に占められている。

以下で、次節への応用を考えて、半無限平面での、複素 potential の一般形を導いておく。今、弾性体が、図 4 にあるように、 $x_2 < 0$ (領域 S^-) にあって、 $x_2 > 0$ (領域 S^+) にないような場合を考えよう。この時、境界面 $x_2 = 0$ (L とよぼう。) で、外力又は変位が指定されているとする。 $\varphi'(z) = \Phi(z)$, $\psi'(z) = \Psi(z)$ なる表示を用いると、(20)より、

$$T_{22} - iT_{12} = \Phi(z) + \Phi^*(z^*) + z\Phi^*(z^*) + \Psi^*(z^*) \quad (21)$$

が得られる。さて、今、弾性体は S^- にしかないので Φ や Ψ は S^- でのみ定義されているが、これを L 上の力が作用しない部分を通して、上半面 S^+ への解析接続することを考える。

(21) を考慮して、

$$\Phi(z) = -\Phi^*(z) - z\Phi^*(z) - \Psi^*(z) \quad (z \in S^+) \quad (22)$$

で定義される左辺の関数 $\Phi(z)$ は、 $z \in S^-$ の時 $z^* \in S^+$ であるので、解析関数である。従って、(22) で $\Phi(z)$ の S^+ への解析接続を行うと、 $\Phi(z)$ の L への境界値で S^+ より近ずけたもの $\Phi^+(x_1)$ は、

$$\Phi^+(x_1) = -\Phi^{*+}(x_1) - x_1\Phi^{*+}(x_1) - \Psi^{*+}(x_1)$$

とかける。又、 L 上の、外力が零である点 x_2 に S^- より近ずけた境界値 $\Phi^-(x_2)$ は (21) より、

$$\Phi^-(x_1) = -\Phi^{*+}(x_1) - x_1\Phi^{*+}(x_1) - \Psi^{*+}(x_1),$$

である。従って、 $\Phi^+(x_1) = \Phi^-(x_1)$ となる。こうして、 S^- のみで定義されている解析関数 $\Phi(z)$ が、 L 上の unloaded segment 上で連続になるように、(22) 式で S^+ へ解析接続されたことになる。然して、全平面 $S^+ + S^-$ で定義された $\Phi(z)$ は、 L の loaded segment 上に cut を持つことは明らかである。さらに (22) より、

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \Phi^*(z) - z\Phi'(z) \quad (23)$$

が得られる。それ故、弾性体の存在する S^- のみで定義されていた $\Phi(z)$ が cut を持つ全平面に解析接続されているので、(23) 式で $\Psi(z)$ を全平面で定義することができるのである。

(23) 式を (21) に代入することによって、

$$T_{22} - iT_{12} = \Phi(z) - \Phi(z^*) + (z - z^*)\Phi^*(z^*) \quad (24)$$

が得られる。さらに (20) は 2) 12) 13)

$$\begin{cases} 2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(z) + \varphi(z^*) - (z - z^*)\Phi^*(z^*), & (25a) \\ T_{11} + T_{22} = 2[\Phi(z) + \Phi^*(z^*)], & (25b) \\ T_{11} - T_{22} - 2iT_{12} = 2[\Phi(z) + \Phi^*(z) + (z - z^*)\Phi'(z)], & (25c) \end{cases}$$

と書ける。このように、全平面への解析接続を考えることにより、一般式 (20) の二個の

解析関数による表式は、唯一の解析関数（正確には，sectionally holomorphic function） $\varphi(z)$ による表式に置き換えられることになる。然るに，これは系の自由度を減ずることになっていない事は，(25) に $\varphi(z)$ ， $\varphi^*(z^*)$ だけでなく $\varphi(z^*)$ が入っていることに注目するなら明らかである。次節では，(25) 式の表現を用いて，半無限平面での解を求め，これより，矩形領域の解を導出するための議論を展開する。

§ 6 半無限平面及び複素変換

この節において，図5のように歯牙に固定された矩形弾性体の一点 D に集中外力 F が作用している時，接着面 OA 上に現われる応力分布を計算するための準備をしておこう。

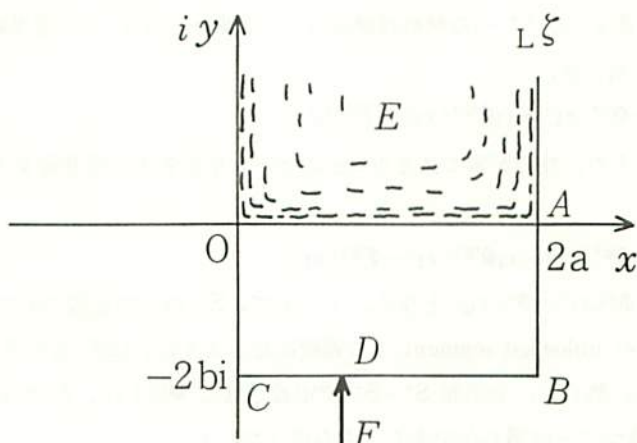


図5 複素 ζ 平面にとった矩形補綴冠 $OABC$. 点 D に集中外力 F が作用し，面 OA は歯牙に固定されている。

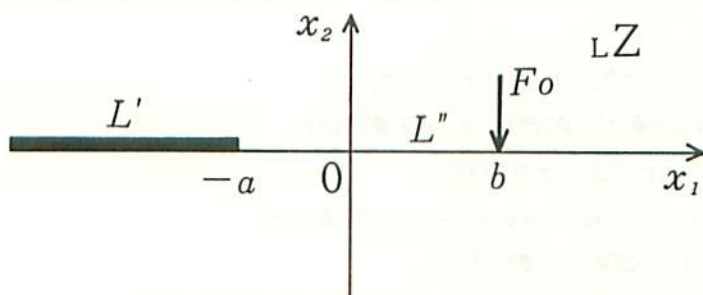


図6 弾性体が， $x_2 < 0$ にあって， $x_1 = b$ 点に集中外力 F_0 が作用する。 $x_1 < -a$ 面は完全に固定されている。

図6にある無限平面の一部が完全に固定され、表面上の一点に、外力が作用した時の厳密解を求め、これを別の領域に変換する手法をも議論する。

図6の場合、境界条件は次の様になる：

$x_2 = \text{Im}(z) = 0$ (即ち L 上) において、

$$\begin{cases} x_1 < -a(: L') \text{ で } g(x_1) = u_1(x_1, 0) + iu_2(x_1, 0) = 0, \end{cases} \quad (26a)$$

$$\begin{cases} x_1 > -a(: L'') \text{ で } T(x_1) = T_{22}^-(x_1) - iT_{12}^+(x_1) = -F_0\delta(x_1 - b). \end{cases} \quad (26b)$$

でところで、(25a), (24) より、

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} [2\mu(u_1 + iu_2)] \Big|_{x_2 \rightarrow 0} = \kappa\Phi^-(x_1) + \Phi^+(x_1), \end{cases} \quad (27a)$$

$$\begin{cases} T_{22}^-(x_1) - iT_{12}^-(x_1) = \Phi^-(x_1) - \Phi^+(x_1), \end{cases} \quad (27b)$$

とかけるので、(26a,b) の境界条件は

$$\begin{cases} x_1 < -a(: L') \text{ で } \kappa\Phi^-(x_1) + \Phi^+(x_1) = 2\mu g'(x_1) = 0, \end{cases} \quad (28a)$$

$$\begin{cases} x_1 > -a(: L'') \text{ で } \Phi^-(x_1) - \Phi^+(x_1) = T(x_1) = -F_0\delta(x_1 - b), \end{cases} \quad (28b)$$

となる。この様な境界値を持つ解析関数は関数論より、

$$\begin{cases} \beta = (\log \kappa)/2\pi, \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} X_0(z) = (z+a)^{-(1/2+i\beta)} \end{cases} \quad (30)$$

なる量及び関数を導入することによって、

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \left\{ \int_{L'} \frac{2\mu g'(t)}{X_0^+(t) \cdot (t-z)} dt - \int_{L''} \frac{T(t)}{X_0(t) \cdot (t-z)} dt \right\} + \text{const.}, \quad (31)$$

で与えられる。これが (28a, b) を満足することは、Hilbert の関係式：

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} 1/(t \pm i\epsilon) = P(1/t) \pm i\pi\delta(t),$$

より自明である。今の場合、我々は結局、

$$\Phi(z) = -\frac{F_0}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z-b} \cdot \left(\frac{z+a}{a+b} \right)^{-(1/2+i\beta)} \quad (32)$$

を得ることができる。これより、(25. b,c) を用いて、接着固定面： $x_2=0$, $x_1 < -a$ に現れる応力分布を求めると、

$$\begin{cases} T_{22}(x_1) = \frac{F_0}{\pi} \cdot \cosh(\pi\beta) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{-x_1-a}} \cdot \frac{1}{b-x_1} \cdot \cos \left\{ \beta \log \left(\frac{-x_1-a}{a+b} \right) \right\}, \\ T_{12}(x_1) = T_{22}(x_1) \cdot \tan i \left\{ \beta \log \left(\frac{-x_1-a}{a+b} \right) \right\}, \end{cases} \quad (33)$$

と求まって来る。従って、 $x_1 < -a$ の実軸全体、つまり、全接着面に作用する全応力 $\Sigma_{22} - i\Sigma_{12}$ が計算できる：

$$\Sigma_{22} - i\Sigma_{12} = \frac{F_0}{\pi} \cdot \cosh \pi\beta \cdot \int_{-\infty}^{-a} \frac{dx}{b-x} \left(\frac{-x-a}{a+b} \right)^{-(1/2+i\beta)} = F_0,$$

これは当然期待される結果である。さらに, $x_2=0, x_1 > -a$ では

$$T_{22} - iT_{12} = -F_0 \cdot \delta(x_1 - a), \quad (34)$$

となっている事も容易に示すことができる。以上の様にして, (25. b, c) 及び (32) は図6に対する厳密な応力分布を与えるものである。

ところで, (31) 式より, あるいはさらに一般に, 弾性力学の境界条件の線形性より明かなように, 外力が集中応力ではなくある分布を持つ時, 例えば $T(x_1) = f(x_1)$ の時にも,

$$T(x_1) = \int_{-a}^{\infty} f(b) \cdot \delta(x_1 - b) db \quad (35)$$

と変形できるので, この場合の複素 potential $\phi_e(z)$ は, (32) の $\phi(z)$ を用いて,

$$\phi_e(z) = \int_{-a}^{\infty} db \cdot \frac{f(b)}{F_0} \cdot \phi(z) \quad (36)$$

で容易に得ることができる。(33) の具体的な数値は図7に与えてある。但し, 将来の歯科補綴冠への応用を考えて, 平面応力を採用し, Poisson 比としては, 純粋鑄造 palladium の値: $\sigma = 0.393$ を用い, $b=5\text{cm}, a=0$ の場合を示してある。図7より, $x_2 = -5\text{cm}$ の位置に, 接線応力の符号の逆転が現れてくる。

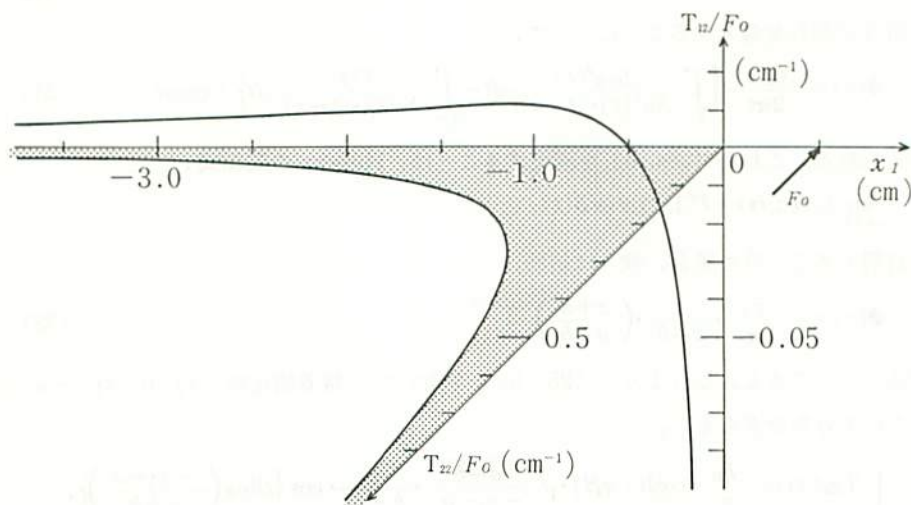


図7 接着面に現れる応力分布曲線。

さて, 次には, この様な単純な形状の場合に対する解を, 求めたい形状の弾性体の場合に変換する際の公式を導いておこう。

等角写像:

$$z = w(\xi), \quad \xi = x + iy \quad (37)$$

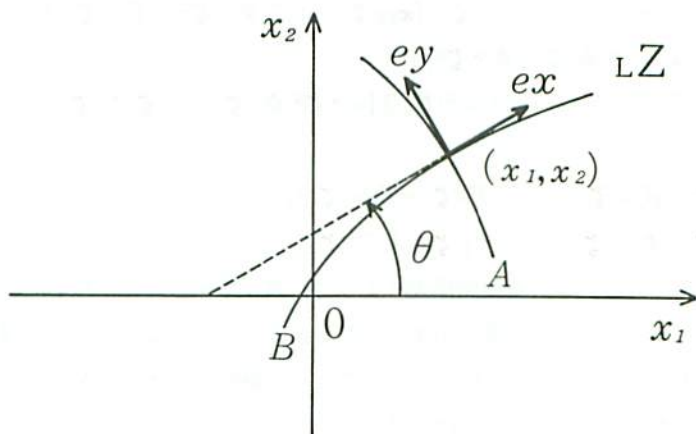


図 8 曲線 A, B は、それぞれ複素 z 平面にとった $x=(一定)$, $y=(一定)$ を表す。 e_x, e_y は x 及び y の増加方向の単位 vector である。

によって、複素 z 平面より、 (x, y) 平面に写像した時の stress tensor T_{ij} 及び変位 u の表示を求めておこう。これは関数論の有効な利用のためには不可欠である¹⁴⁾。今、平面上の点 (x_1, x_2) が平面上の点 (x, y) に写像されるとしよう。この時、平面に於る stress $T_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=x, y$) と平面に於る stress T_{ij} との間には

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1,2} (e_\alpha e_i) T_{ij} (e_\beta \cdot e_j)$$

なる関係が存在する (図 8 参照)。ここに e_α は α 軸方向への単位 vector である。これは次の式にまとめられる：

$$\begin{cases} T_{xx} + T_{yy} = T_{11} + T_{22}, \\ T_{xx} - T_{yy} - 2i T_{xy} = e^{i2\theta} (T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}) \end{cases} \quad (38)$$

又、複素変位 vector の変換関係は、

$$u_x + iu_y = e^{-i\theta} (u_1 + iu_2) \quad (39)$$

で与えられる。

一方、点 (x_1, x_2) で $y=(一定)$ である曲線に沿う (即ち、 e_x 方向の) 微小線素 dz_1 を考えると、

$$dz_1 = J \cdot e^{i\theta} \cdot dx; \quad J: \text{real},$$

とかける。ところで、 $dz = w'(\zeta) d\zeta$ であるので、 $J = |w'(\zeta)|$ 及び $e^{i\theta} = w'(\zeta) / |w'(\zeta)|$ が得られる。従って、(20) 及び (38), (39) より求める変換関係式が次のように書き下せる¹³⁾。

$$\begin{cases} 2\mu(u_x + iu_y) = \tau w'(\zeta) / |\tau w'(\zeta)| \{ \kappa \varphi_0(\zeta) - \tau w(\zeta) \phi_0^*(\zeta^*) - \Psi_0^*(\zeta^*) \}, \\ T_{xx} + T_{yy} = 2[\phi_0(\zeta) + \phi_0^*(\zeta^*)], \\ T_{xx} - T_{yy} - 2iT_{xy} = -[2/\tau^*(\zeta^*)] \{ \tau^*(\zeta^*) \phi_0'(\zeta) + \tau w'(\zeta) \Psi_0(\zeta) \} \end{cases} \quad (40)$$

ここで, $\zeta = x + iy$ であり,

$$\begin{cases} \varphi_0(\zeta) = \varphi[\tau w(\zeta)], & \Psi_0(\zeta) = \Psi[\tau w(\zeta)], \\ \phi_0(\zeta) = \phi[\tau w(\zeta)], & \Psi_0(\zeta) = \Psi[\tau w(\zeta)], \end{cases} \quad (41)$$

なる表示を用いてある。この変換関係式によって、図6に示した様な極めて単純な応力状態の解から、図5に対する解を導き出すことが可能になってくるのである。図5に対する応力分布は、多くの示唆を含み、応用面だけでなく理論的にも Saint-Venant 則の検討等興味深いものである。これについては、具体的応力分布も含めて、次の節で議論することにした。

参 考 文 献

- 10) A.C. Stevenson, Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. **A184**, 129 (1945); Phil. Mag., Ser. VII **34**, 776 (1943).
- 11) G.V. Kolosov, Zeit. Math. Phys. **62**, 384 (1914).
- 12) N.I. Muskhelishvili, Math. Ann. **107**, 282 (1932).
- 13) N.I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity", Noordhoff, Leyden, Netherlands, 1977.
S.D. Volkov and M.L. Komissarova "Certain Representations of the General Solutions of the Boundaryvalue Problems of Elasticity Theory", Inzh. Zh. **3**, 86 (1963).
- 14) G.M.L. Gladwell and A.H. England, Q. Jl. Mech. appl. Math. **30**, 175 (1977).
A.H. England and R. Shail, Q. Jl. Mech. appl. Math. **30**, 397 (1977).